Całka oznaczona Riemanna

IMiIP, Inżynieria Obliczeniowa, Analiza matematyczna 2

Anna Bahyrycz

Literatura

[1] M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 2 Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2011

[2] M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 2 Przykłady i zadania*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2012

[3] W. Krysicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004

Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną. Oznaczmy

$$m := \inf f([a, b]), \quad M := \sup f([a, b]).$$

Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną. Oznaczmy

$$m := \inf f([a, b]), \quad M := \sup f([a, b]).$$

Podziałem $\mathcal{P}$ przedziału $[a, b]$ nazywać będziemy skończony ciąg $x_0, x_1, \dots, x_k$ taki, że

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k = b.$$

Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną. Oznaczmy

$$m := \inf f([a, b]), \quad M := \sup f([a, b]).$$

Podziałem $\mathcal{P}$ przedziału $[a, b]$ nazywać będziemy skończony ciąg $x_0, x_1, \dots, x_k$ taki, że

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k = b.$$

Średnicą podziału $\mathcal{P}$ nazywamy

$$\delta(\mathcal{P}) := \max\{\Delta x_i : \ i \in \{1, \dots, k\}\},$$

gdzie $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i \in \{1, \dots, k\}$.

Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną. Oznaczmy

$$m := \inf f([a, b]), \quad M := \sup f([a, b]).$$

Podziałem $\mathcal{P}$ przedziału $[a, b]$ nazywać będziemy skończony ciąg $x_0, x_1, \ldots, x_k$ taki, że

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k = b.$$

Średnicą podziału $\mathcal{P}$ nazywamy

$$\delta(\mathcal{P}) := \max\{\Delta x_i : \ i \in \{1, \ldots, k\}\},$$

gdzie $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i \in \{1, \ldots, k\}$. Niech dla

$$m_i := \inf f([x_{i-1}, x_i]), \quad M_i := \sup f([x_{i-1}, x_i]), \qquad i \in \{1, \ldots, k\}.$$

Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną. Oznaczmy

$$m := \inf f([a,b]), \quad M := \sup f([a,b]).$$

Podziałem $\mathcal{P}$ przedziału $[a,b]$ nazywać będziemy skończony ciąg $x_0, x_1, \ldots, x_k$ taki, że

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k = b.$$

Średnicą podziału $\mathcal{P}$ nazywamy

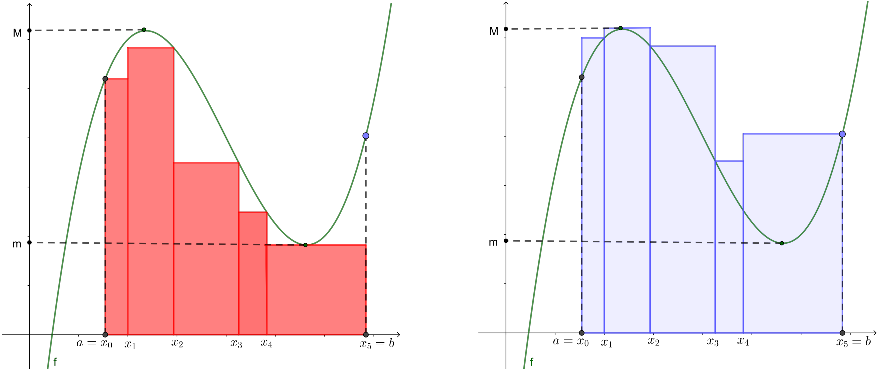
$$\delta(\mathcal{P}) := \max\{\Delta x_i : \ i \in \{1, \ldots, k\}\},$$

gdzie $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i \in \{1, \ldots, k\}$. Niech dla

$$m_i := \inf f([x_{i-1}, x_i]), \quad M_i := \sup f([x_{i-1}, x_i]), \qquad i \in \{1, \ldots, k\}.$$

Dolną (górną) sumą całkową podziału $\mathcal{P}$ nazywamy (odpowiednio)

$$s(\mathcal{P}) := \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i, \quad \Big(S(\mathcal{P}) := \sum_{i=1}^{k} M_i \Delta x_i\Big).$$



Ilustracja: dolnej sumy całkowej i górnej sumy całkowej

podziału $\mathcal{P} = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ funkcji f na przedziale $[a, b]$

Jeżeli $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ są dwoma podziałami przedziału $[a, b]$ oraz $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$, mówimy, że $\mathcal{P}'$ jest podpodziałem podziału $\mathcal{P}$.

Jeżeli $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ są dwoma podziałami przedziału $[a, b]$ oraz $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$, mówimy, że $\mathcal{P}'$ jest podpodziałem podziału $\mathcal{P}$.
Ciąg podziałów $(\mathcal{P}_n)$ przedziału $[a, b]$ nazywamy normalnym, jeśli

$$lim_{n\to\infty}\delta(\mathcal{P}_n) = 0.$$

Oznacza to, że gdy n rośnie, to uzyskane podprzedziały (czyli części, na które dzielimy przedział $[a, b]$) są coraz mniejsze.

Uwaga 1

1. $m(b - a) \leq s(\mathcal{P}) \leq S(\mathcal{P}) \leq M(b - a)$

Jeżeli $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ są dwoma podziałami przedziału $[a,b]$ oraz $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$, mówimy, że $\mathcal{P}'$ jest podpodziałem podziału $\mathcal{P}$.
Ciąg podziałów $(\mathcal{P}_n)$ przedziału $[a,b]$ nazywamy normalnym, jeśli

$$lim_{n\to\infty}\delta(\mathcal{P}_n) = 0.$$

Oznacza to, że gdy n rośnie, to uzyskane podprzedziały (czyli części, na które dzielimy przedział $[a,b]$) są coraz mniejsze.

Uwaga 1

1. $m(b-a) \leq s(\mathcal{P}) \leq S(\mathcal{P}) \leq M(b-a)$
2. *jeżeli $\mathcal{P}'$ jest podpodziałem podziału $\mathcal{P}$, to*

$$s(\mathcal{P}) \leq s(\mathcal{P}'), \quad S(\mathcal{P}') \leq S(\mathcal{P})$$

Jeżeli $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ są dwoma podziałami przedziału $[a,b]$ oraz $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$, mówimy, że $\mathcal{P}'$ jest podpodziałem podziału $\mathcal{P}$.

Ciąg podziałów $(\mathcal{P}_n)$ przedziału $[a,b]$ nazywamy normalnym, jeśli

$$lim_{n\to\infty}\delta(\mathcal{P}_n) = 0.$$

Oznacza to, że gdy n rośnie, to uzyskane podprzedziały (czyli części, na które dzielimy przedział $[a,b]$) są coraz mniejsze.

Uwaga 1

1. $m(b-a) \leq s(\mathcal{P}) \leq S(\mathcal{P}) \leq M(b-a)$
2. *jeżeli $\mathcal{P}'$ jest podpodziałem podziału $\mathcal{P}$, to*

$$s(\mathcal{P}) \leq s(\mathcal{P}'), \quad S(\mathcal{P}') \leq S(\mathcal{P})$$

3. *jeżeli $(\mathcal{P}_n)$ jest normalnym ciągiem podziałów, to istnieją granice* $\lim_{n\to\infty} s(\mathcal{P}_n)$ *oraz* $\lim_{n\to\infty} S(\mathcal{P}_n)$

Jeżeli $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ są dwoma podziałami przedziału $[a,b]$ oraz $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$, mówimy, że $\mathcal{P}'$ jest podpodziałem podziału $\mathcal{P}$.
Ciąg podziałów $(\mathcal{P}_n)$ przedziału $[a,b]$ nazywamy normalnym, jeśli

$$lim_{n\to\infty}\delta(\mathcal{P}_n) = 0.$$

Oznacza to, że gdy n rośnie, to uzyskane podprzedziały (czyli części, na które dzielimy przedział $[a,b]$) są coraz mniejsze.

Uwaga 1

1. $m(b-a) \le s(\mathcal{P}) \le S(\mathcal{P}) \le M(b-a)$
2. *jeżeli $\mathcal{P}'$ jest podpodziałem podziału $\mathcal{P}$, to*
$$s(\mathcal{P}) \le s(\mathcal{P}'), \quad S(\mathcal{P}') \le S(\mathcal{P})$$
3. *jeżeli $(\mathcal{P}_n)$ jest normalnym ciągiem podziałów, to istnieją granice $\lim_{n\to\infty} s(\mathcal{P}_n)$ oraz $\lim_{n\to\infty} S(\mathcal{P}_n)$*
4. *powyższe granice nie zależą od wyboru normalnego ciągu podziałów, nazywamy je odpowiednio całką dolną (górną) funkcji f i oznaczamy odpowiednio*
$$\underline{\int_a^b} f(x)dx := \lim_{n\to\infty} s(\mathcal{P}_n), \quad \overline{\int_a^b} f(x)dx := \lim_{n\to\infty} S(\mathcal{P}_n)$$

Definicja 1

Funkcja ograniczona $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *jest całkowalna w sensie Riemanna gdy jej całka dolna jest równa całce górnej.*

Definicja 1

Funkcja ograniczona $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *jest całkowalna w sensie Riemanna gdy jej całka dolna jest równa całce górnej.*
Tę wspólną wartość nazywamy całką oznaczoną Riemanna funkcji f *w przedziale* $[a, b]$ *i oznaczamy symbolem*

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Definicja 1

Funkcja ograniczona $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *jest całkowalna w sensie Riemanna gdy jej całka dolna jest równa całce górnej.*
Tę wspólną wartość nazywamy całką oznaczoną Riemanna funkcji f *w przedziale* $[a, b]$ *i oznaczamy symbolem*

$$\int_a^b f(x)dx.$$

W powyższej całce liczbę a *nazywamy dolną granicą całkowania, liczbę* b *górną granicą całkowania, natomiast* f *funkcją podcałkową.*

Definicja 1

Funkcja ograniczona $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna gdy jej całka dolna jest równa całce górnej.
Tę wspólną wartość nazywamy całką oznaczoną Riemanna funkcji f w przedziale $[a, b]$ i oznaczamy symbolem

$$\int_a^b f(x)dx.$$

W powyższej całce liczbę a nazywamy dolną granicą całkowania, liczbę b górną granicą całkowania, natomiast f funkcją podcałkową.
Ponadto przyjmujemy, że

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \quad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Definicja 1

Funkcja ograniczona $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna gdy jej całka dolna jest równa całce górnej.
Tę wspólną wartość nazywamy całką oznaczoną Riemanna funkcji f w przedziale $[a, b]$ i oznaczamy symbolem

$$\int_a^b f(x)dx.$$

W powyższej całce liczbę a nazywamy dolną granicą całkowania, liczbę b górną granicą całkowania, natomiast f funkcją podcałkową.
Ponadto przyjmujemy, że

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \quad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Uwaga 2

1. $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

Definicja 1

Funkcja ograniczona $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna gdy jej całka dolna jest równa całce górnej.
Tę wspólną wartość nazywamy całką oznaczoną Riemanna funkcji f w przedziale $[a, b]$ i oznaczamy symbolem

$$\int_a^b f(x)dx.$$

W powyższej całce liczbę a nazywamy dolną granicą całkowania, liczbę b górną granicą całkowania, natomiast f funkcją podcałkową.
Ponadto przyjmujemy, że

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \quad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Uwaga 2

1. $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$
2. *jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje podział $\mathcal{P}$ przedziału $[a, b]$ taki, że $S(\mathcal{P}) - s(\mathcal{P}) < \varepsilon$, to f jest całkowalna w sensie Riemanna*

Przyjrzyjmy się, w jaki sposób można obliczyć całkę oznaczoną Riemanna korzystając z definicji.

Przykład 1

Obliczyć całkę oznaczoną funkcji stałej f *przyjmującej wartość* $c \in \mathbb{R}$ *na przedziale* $[a, b]$.

Przyjrzyjmy się, w jaki sposób można obliczyć całkę oznaczoną Riemanna korzystając z definicji.

Przykład 1

Obliczyć całkę oznaczoną funkcji stałej f przyjmującej wartość $c \in \mathbb{R}$ na przedziale $[a, b]$.
Funkcja f jest ograniczona oraz $m_i = M_i = c$ dla każdego $\Delta x_i \subset [a, b]$, bo f jest funkcją stałą. Rozważając dowolny ciąg podziałów normalnych $(\mathcal{P}_n)$ odcinka $[a, b]$ otrzymujemy

$$\underline{\int_a^b} c\,dx = \lim_{n\to\infty} s(\mathcal{P}_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i$$

$$= c \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c \lim_{n\to\infty} (x_1 - x_0) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) = c \lim_{n\to\infty} (b - a) = c(b - a)$$

Przyjrzyjmy się, w jaki sposób można obliczyć całkę oznaczoną Riemanna korzystając z definicji.

Przykład 1

Obliczyć całkę oznaczoną funkcji stałej f przyjmującej wartość $c \in \mathbb{R}$ na przedziale $[a, b]$.

Funkcja f jest ograniczona oraz $m_i = M_i = c$ dla każdego $\Delta x_i \subset [a, b]$, bo f jest funkcją stałą. Rozważając dowolny ciąg podziałów normalnych $(\mathcal{P}_n)$ odcinka $[a, b]$ otrzymujemy

$$\underline{\int_a^b} c\,dx = \lim_{n\to\infty} s(\mathcal{P}_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i$$

$$= c \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c \lim_{n\to\infty} (x_1 - x_0) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) = c \lim_{n\to\infty} (b - a) = c(b - a)$$

i analogicznie

$$\overline{\int_a^b} c\,dx = \lim_{n\to\infty} S(\mathcal{P}_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c(b - a).$$

Przyjrzyjmy się, w jaki sposób można obliczyć całkę oznaczoną Riemanna korzystając z definicji.

Przykład 1

Obliczyć całkę oznaczoną funkcji stałej f *przyjmującej wartość* $c \in \mathbb{R}$ *na przedziale* $[a,b]$.

Funkcja f *jest ograniczona oraz* $m_i = M_i = c$ *dla każdego* $\Delta x_i \subset [a,b]$, *bo* f *jest funkcją stałą. Rozważając dowolny ciąg podziałów normalnych* $(\mathcal{P}_n)$ *odcinka* $[a,b]$ *otrzymujemy*

$$\underline{\int_a^b} c\,dx = \lim_{n\to\infty} s(\mathcal{P}_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i$$

$$= c \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c \lim_{n\to\infty} (x_1 - x_0) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) = c \lim_{n\to\infty} (b-a) = c(b-a)$$

i analogicznie

$$\overline{\int_a^b} c\,dx = \lim_{n\to\infty} S(\mathcal{P}_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c(b-a).$$

Ponieważ całki dolna i górna z funkcji stałej przyjmującej wartość $c \in \mathbb{R}$ *na przedziale* $[a,b]$ *są równe, więc całka oznaczona z tej funkcji na przedziale* $[a,b]$ *istnieje oraz*

$$\int\limits_a^b c\,dx = c(b-a).$$

Wykażemy teraz, że nie każda funkcja ograniczona jest całkowalna.

Przykład 2

Pokazać, że **funkcja Dirichleta** *określona wzorem*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{dla} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \textit{dla} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

nie jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a, b] \subset \mathbb{R}$*.*

Wykażemy teraz, że nie każda funkcja ograniczona jest całkowalna.

Przykład 2

Pokazać, że **funkcja Dirichleta** *określona wzorem*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{dla} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

nie jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a,b] \subset \mathbb{R}$.
Funkcja f *jest ograniczona oraz* $m_i = 0$ *i* $M_i = 1$ *dla każdego* $\Delta x_i \subset [a,b]$, *bo w każdym przedziale są zarówno liczby wymierne jak i niewymierne.*
Rozważając dowolny ciąg podziałów normalnych $(\mathcal{P}_n)$ *odcinka* $[a,b]$ *otrzymujemy*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} s(\mathcal{P}_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0 \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 0 \cdot (b-a) = 0$$

zaś

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S(\mathcal{P}_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b-a.$$

Wykażemy teraz, że nie każda funkcja ograniczona jest całkowalna.

Przykład 2

Pokazać, że **funkcja Dirichleta** *określona wzorem*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{dla} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \textit{dla} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

nie jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a,b] \subset \mathbb{R}$.
Funkcja f *jest ograniczona oraz* $m_i = 0$ *i* $M_i = 1$ *dla każdego* $\Delta x_i \subset [a,b]$, *bo w każdym przedziale są zarówno liczby wymierne jak i niewymierne.*
Rozważając dowolny ciąg podziałów normalnych $(\mathcal{P}_n)$ *odcinka* $[a,b]$ *otrzymujemy*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} s(\mathcal{P}_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0 \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 0 \cdot (b-a) = 0$$

zaś

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S(\mathcal{P}_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b-a.$$

Ponieważ całki dolna i górna z funkcji Dirichleta na dowolnym przedziale $[a,b]$ *są* **różne** *więc całka oznaczona Riemanna z tej funkcji na przedziale* $[a,b]$ *nie istnieje.*

Przykład 3

Oszacować wartość całki

$$\int_0^2 \sqrt{1+x^4}\, dx.$$

Przykład 3

Oszacować wartość całki

$$\int_0^2 \sqrt{1+x^4}\,dx.$$

Obliczenie tej całki nie byłoby łatwym zadaniem.
Zauważmy, że dla każdego $x \in [0,2]$ *zachodzą nierówności* $0 \leq x^4 \leq 16$, *a zatem* $1 \leq 1+x^4 \leq 17$. *Ponieważ funkcja pierwiastkowa jest funkcją rosnącą, to*

$$1 \leq \sqrt{1+x^4} \leq \sqrt{17}.$$

Przykład 3

Oszacować wartość całki

$$\int_0^2 \sqrt{1+x^4}\,dx.$$

Obliczenie tej całki nie byłoby łatwym zadaniem.
Zauważmy, że dla każdego $x \in [0,2]$ *zachodzą nierówności* $0 \le x^4 \le 16$, *a zatem* $1 \le 1 + x^4 \le 17$. *Ponieważ funkcja pierwiastkowa jest funkcją rosnącą, to*

$$1 \le \sqrt{1+x^4} \le \sqrt{17}.$$

Skoro długość przedziału całkowania wynosi 2, to na mocy Uwagi 2 dostajemy następujące oszacowanie wartości całki:

$$2 \le \int_0^2 \sqrt{1+x^4}\,dx \le 2\sqrt{17}.$$

Warunki wystarczające całkowalności

Twierdzenie 1

Funkcja ciągła na przedziale $[a, b]$ *jest całkowalna w sensie Riemanna na tym przedziale.*

Warunki wystarczające całkowalności

Twierdzenie 1

Funkcja ciągła na przedziale $[a, b]$ *jest całkowalna w sensie Riemanna na tym przedziale.*

Twierdzenie 2

Funkcja monotoniczna na przedziale $[a, b]$ *jest całkowalna w sensie Riemanna na tym przedziale.*

Warunki wystarczające całkowalności

Twierdzenie 1

Funkcja ciągła na przedziale $[a, b]$ *jest całkowalna w sensie Riemanna na tym przedziale.*

Twierdzenie 2

Funkcja monotoniczna na przedziale $[a, b]$ *jest całkowalna w sensie Riemanna na tym przedziale.*

Twierdzenie 3

Funkcja, która ma skończoną liczbę punktów nieciągłości w przedziale $[a, b]$ *jest całkowalna w sensie Riemanna na tym przedziale.*

Przykład 4

Korzystając z definicji całki oznaczonej Riemanna obliczyć

$$\int_0^2 x\,dx.$$

Przykład 4

Korzystając z definicji całki oznaczonej Riemanna obliczyć

$$\int_0^2 x\,dx.$$

Funkcja podcałkowa $f(x) = x$ *jest funkcją ciągłą, stąd na mocy Twierdzenia 1 całka ta istnieje. Zatem przy dowolnym wyborze ciągu podziałów normalnych odcinka* $[0,2]$ *całka dolna i górna są równe. Możemy więc wybrać jeden szczególny ciąg podziałów normalnych* $(\mathcal{P}_n)$ *odcinka* $[0,2]$ *w taki sposób, by łatwo było obliczyć granicę* $\lim_{n\to+\infty} S(\mathcal{P}_n)$.

Przykład 4

Korzystając z definicji całki oznaczonej Riemanna obliczyć

$$\int_0^2 x\,dx.$$

Funkcja podcałkowa $f(x) = x$ *jest funkcją ciągłą, stąd na mocy Twierdzenia 1 całka ta istnieje. Zatem przy dowolnym wyborze ciągu podziałów normalnych odcinka* $[0,2]$ *całka dolna i górna są równe. Możemy więc wybrać jeden szczególny ciąg podziałów normalnych* $(\mathcal{P}_n)$ *odcinka* $[0,2]$ *w taki sposób, by łatwo było obliczyć granicę* $\lim_{n\to+\infty} S(\mathcal{P}_n)$. *Dla ustalonego* n *wybierzmy punkty podziału* $x_i = \frac{2}{n}i$, *wówczas* $M_i = \frac{2}{n}i$ *dla* $i = 1, \ldots, n$. *Każdy z odcinków* $[x_{i-1}, x_i]$ *ma tę samą długość* $\Delta x_i = \frac{2}{n}$. *Oznacza to, że*

$$\delta(\mathcal{P}_n) = \frac{2}{n}, \quad \text{a stąd} \quad \lim_{n\to+\infty} \delta(\mathcal{P}_n) = 0.$$

Przykład 4

Korzystając z definicji całki oznaczonej Riemanna obliczyć

$$\int_0^2 x\,dx.$$

Funkcja podcałkowa $f(x) = x$ *jest funkcją ciągłą, stąd na mocy Twierdzenia 1 całka ta istnieje. Zatem przy dowolnym wyborze ciągu podziałów normalnych odcinka* $[0,2]$ *całka dolna i górna są równe. Możemy więc wybrać jeden szczególny ciąg podziałów normalnych* $(\mathcal{P}_n)$ *odcinka* $[0,2]$ *w taki sposób, by łatwo było obliczyć granicę* $\lim_{n\to+\infty} S(\mathcal{P}_n)$*. Dla ustalonego* n *wybierzmy punkty podziału* $x_i = \frac{2}{n}i$*, wówczas* $M_i = \frac{2}{n}i$ *dla* $i = 1,\ldots,n$*. Każdy z odcinków* $[x_{i-1}, x_i]$ *ma tę samą długość* $\Delta x_i = \frac{2}{n}$*. Oznacza to, że*

$$\delta(\mathcal{P}_n) = \frac{2}{n}, \quad \text{a stąd} \quad \lim_{n\to+\infty} \delta(\mathcal{P}_n) = 0.$$

Uwzględniając to możemy wykonać następujące obliczenia:

$$\int_0^2 x dx = \overline{\int_0^2} x dx = \lim_{n\to\infty} S(\mathcal{P}_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{2}{n}i\right)\frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^n i$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^2}\cdot(1+2+\cdots+n) = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^2}\cdot\frac{(1+n)n}{2} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{n} = 2.$$

Analizując Przykład 4 otrzymujemy następujący

Wniosek 1

Jeżeli funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a, b]$, to

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\Big(a + i\,\frac{b-a}{n}\Big)\right].$$

Analizując Przykład 4 otrzymujemy następujący

Wniosek 1

Jeżeli funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a,b]$, to

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\Big(a + i\,\frac{b-a}{n}\Big)\right].$$

Przykład 5

Korzystając z definicji całki oznaczonej Riemanna uzasadnić równość:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3} = \frac{1}{3}.$$

Analizując Przykład 4 otrzymujemy następujący

Wniosek 1

Jeżeli funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a,b]$, to

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\Big[\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\Big(a + i\,\frac{b-a}{n}\Big)\Big].$$

Przykład 5

Korzystając z definicji całki oznaczonej Riemanna uzasadnić równość:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3} = \frac{1}{3}.$$

W rozwiązaniu skorzystamy z Wniosku 1. Mamy

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3} = \lim_{n\to+\infty}\Big[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{i}{n}\Big)^2\Big].$$

We wzorze z Wniosku 1 przyjmujemy $[a,b]=[0,1]$ *oraz* $f(x)=x^2$ *i dostajemy*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3} = \int_0^1 x^2\,dx$$ *(dalej z Twierdzenia Newtona-Leibniza).*

Drugie zasadnicze twierdzenie rachunku całki oznaczonej Riemanna opisujące związek między całką oznaczoną i nieoznaczoną

Twierdzenie 4 (Newtona- Leibniza)

Jeżeli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *jest funkcją ciągłą, to ma ona funkcję pierwotną* F *oraz*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Drugie zasadnicze twierdzenie rachunku całki oznaczonej Riemanna opisujące związek między całką oznaczoną i nieoznaczoną

Twierdzenie 4 (Newtona- Leibniza)

Jeżeli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to ma ona funkcję pierwotną F oraz

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Różnicę wartości funkcji pierwotnej na końcach przedziału występującą w powyższym wzorze zapisujemy również w następujący sposób:

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Drugie zasadnicze twierdzenie rachunku całki oznaczonej Riemanna opisujące związek między całką oznaczoną i nieoznaczoną

Twierdzenie 4 (Newtona- Leibniza)

Jeżeli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *jest funkcją ciągłą, to ma ona funkcję pierwotną* F *oraz*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Różnicę wartości funkcji pierwotnej na końcach przedziału występującą w powyższym wzorze zapisujemy również w następujący sposób:

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Przykład 6

Obliczyć:

(a) $\int_0^1 x^2\,dx$

Drugie zasadnicze twierdzenie rachunku całki oznaczonej Riemanna opisujące związek między całką oznaczoną i nieoznaczoną

Twierdzenie 4 (Newtona- Leibniza)

Jeżeli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *jest funkcją ciągłą, to ma ona funkcję pierwotną* F *oraz*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Różnicę wartości funkcji pierwotnej na końcach przedziału występującą w powyższym wzorze zapisujemy również w następujący sposób:

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Przykład 6

Obliczyć:

(a) $\int_0^1 x^2\, dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + C\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 + C - \left(\frac{1}{3} \cdot 0^3 + C\right) = \frac{1}{3};$

Drugie zasadnicze twierdzenie rachunku całki oznaczonej Riemanna opisujące związek między całką oznaczoną i nieoznaczoną

Twierdzenie 4 (Newtona- Leibniza)

Jeżeli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *jest funkcją ciągłą, to ma ona funkcję pierwotną* F *oraz*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Różnicę wartości funkcji pierwotnej na końcach przedziału występującą w powyższym wzorze zapisujemy również w następujący sposób:

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Przykład 6

Obliczyć:

(a) $\int_0^1 x^2\, dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + C\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 + C - \left(\frac{1}{3} \cdot 0^3 + C\right) = \frac{1}{3};$

(b) $\int_0^\pi \sin x\, dx$

Drugie zasadnicze twierdzenie rachunku całki oznaczonej Riemanna opisujące związek między całką oznaczoną i nieoznaczoną

Twierdzenie 4 (Newtona- Leibniza)

Jeżeli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *jest funkcją ciągłą, to ma ona funkcję pierwotną* F *oraz*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Różnicę wartości funkcji pierwotnej na końcach przedziału występującą w powyższym wzorze zapisujemy również w następujący sposób:

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Przykład 6

Obliczyć:

(a) $\int_0^1 x^2\, dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + C\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 + C - \left(\frac{1}{3}\cdot 0^3 + C\right) = \frac{1}{3};$

(b) $\int_0^\pi \sin x\, dx = (-\cos x + C)\Big|_0^\pi$

Drugie zasadnicze twierdzenie rachunku całki oznaczonej Riemanna opisujące związek między całką oznaczoną i nieoznaczoną

Twierdzenie 4 (Newtona- Leibniza)

Jeżeli $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *jest funkcją ciągłą, to ma ona funkcję pierwotną* F *oraz*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Różnicę wartości funkcji pierwotnej na końcach przedziału występującą w powyższym wzorze zapisujemy również w następujący sposób:

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Przykład 6

Obliczyć:

(a) $\int_0^1 x^2\,dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + C\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 + C - \left(\frac{1}{3}\cdot 0^3 + C\right) = \frac{1}{3}$;

(b) $\int_0^\pi \sin x\,dx = (-\cos x + C)\Big|_0^\pi = -\cos\pi + C - (-\cos 0 + C) = 1 + C + 1 - C = 2.$

Własności całki oznaczonej

Twierdzenie 5 (O liniowości całki oznaczonej)

Niech $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *będą funkcjami całkowalnymi w sensie Riemanna i niech* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Wówczas*

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

Własności całki oznaczonej

Twierdzenie 5 (O liniowości całki oznaczonej)

Niech $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *będą funkcjami całkowalnymi w sensie Riemanna i niech* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Wówczas*

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

Twierdzenie 6 (O addytywności całki względem przedziału całkowania)

Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją całkowalną w sensie Riemanna oraz* $c \in (a, b)$. *Wówczas*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Przykład 7

Obliczyć

$$\int_{-1}^{2} |x| \, dx.$$

Przykład 7

Obliczyć

$$\int_{-1}^{2} |x|\, dx.$$

Ponieważ

$$|x| = \begin{cases} x & \textit{dla} \quad x \geq 0 \\ -x & \textit{dla} \quad x < 0 \end{cases},$$

więc korzystając najpierw z Twierdzenia o addytywności całki względem przedziału całkowania, a następnie z Twierdzenia Newtona-Leibniza otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{2} |x|\, dx &= \int_{-1}^{0} |x|\, dx + \int_{0}^{2} |x|\, dx \\ &= \int_{-1}^{0} -x\, dx + \int_{0}^{2} x\, dx = -\frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{2}x^2\Big|_{0}^{2} \\ &= -\frac{1}{2}\cdot 0^2 - \Big(-\frac{1}{2}\cdot(-1)^2\Big) + \frac{1}{2}\cdot 2^2 - \frac{1}{2}\cdot 0^2 \\ &= \frac{1}{2} + 2 = 2\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Twierdzenie 7

Niech $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *oraz* f *będzie funkcją całkowalną w sensie Riemanna i niech funkcja* g *różni się od funkcji* f *tylko w skończonej liczbie punktów. Wówczas funkcja* g *jest całkowalna w sensie Riemanna oraz*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Twierdzenie 7

Niech $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *oraz* f *będzie funkcją całkowalną w sensie Riemanna i niech funkcja* g *różni się od funkcji* f *tylko w skończonej liczbie punktów. Wówczas funkcja* g *jest całkowalna w sensie Riemanna oraz*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Twierdzenie 8

Niech $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *będą funkcjami całkowalnymi w sensie Riemanna i niech* $f(x) \leq g(x)$ *dla* $x \in [a,b]$*. Wówczas*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Twierdzenie 9 (O oszacowaniu wartości bezwzględnej całki)

Jeżeli f *jest funkcją całkowalną na przedziale* $[a, b]$, *to*

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b \left| f(x) \right| dx.$$

Twierdzenie 9 (O oszacowaniu wartości bezwzględnej całki)

Jeżeli f jest funkcją całkowalną na przedziale $[a,b]$, to

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Twierdzenie 10 (O wartości średniej)

Jeżeli f jest funkcją ciągłą na przedziale $[a,b]$, to istnieje punkt $c \in [a,b]$ taki, że

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Twierdzenie 11

Jeżeli funkcje f, g mają ciągłe pochodne na przedziale $[a, b]$, to

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Twierdzenie 11

Jeżeli funkcje f, g mają ciągłe pochodne na przedziale $[a, b]$, to

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Przykład 8

Obliczyć

$$\int_1^e \ln x \, dx.$$

Twierdzenie 11

Jeżeli funkcje f, g mają ciągłe pochodne na przedziale $[a, b]$, to

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Przykład 8

Obliczyć

$$\int_1^e \ln x \, dx.$$

$$\int_1^e \ln x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u(x) = \ln x & u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = 1 & v(x) = x \end{array} \right| = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot x \, dx$$

$$= x \ln x \Big|_1^e - x \Big|_1^e = e - 0 - (e - 1) = 1.$$

Twierdzenie 11

Jeżeli funkcje f, g mają ciągłe pochodne na przedziale $[a, b]$, to

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Przykład 8

Obliczyć

$$\int_1^e \ln x \, dx.$$

$$\int_1^e \ln x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u(x) = \ln x & u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = 1 & v(x) = x \end{array} \right| = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot x \, dx$$

$$= x \ln x \Big|_1^e - x \Big|_1^e = e - 0 - (e - 1) = 1.$$

Uwaga. *Można również najpierw znaleźć funkcję pierwotną funkcji* $f(x) = \ln x$ *i zastosować Twierdzenie Newtona-Leibniza, tzn.*

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C, \quad \text{a stąd} \quad \int_1^e \ln x \, dx = (x \ln x - x)\Big|_1^e = e - e - (0 - 1) = 1.$$

Twierdzenie 12

Niech $\varphi : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ *i* $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ *będą funkcjami ciągłymi. Jeżeli* φ *ma ciągłą pochodną na przedziale* $[a,b]$*, to*

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt.$$

Twierdzenie 12

Niech $\varphi : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ *i* $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ *będą funkcjami ciągłymi. Jeżeli* φ *ma ciągłą pochodną na przedziale* $[a, b]$, *to*

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt.$$

Przykład 9

Obliczyć

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx.$$

Twierdzenie 12

Niech $\varphi : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ *i* $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ *będą funkcjami ciągłymi. Jeżeli* φ *ma ciągłą pochodną na przedziale* $[a,b]$*, to*

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt.$$

Przykład 9

Obliczyć

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx.$$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2+1 \\ dt = 2x\,dx \\ \frac{1}{2}\,dt = x\,dx \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{t}\Big|_1^2 = \sqrt{2}-1.$$

Zauważmy, że dokonaliśmy tu następującej zmiany wartości granic całkowania:

x	0	1
$t = x^2+1$	1	2

Twierdzenie 12

Niech $\varphi : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ i $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi. Jeżeli φ ma ciągłą pochodną na przedziale $[a, b]$, to

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt.$$

Przykład 9

Obliczyć

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx.$$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2+1 \\ dt = 2x\,dx \\ \frac{1}{2}\,dt = x\,dx \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{t}\Big|_1^2 = \sqrt{2} - 1.$$

Zauważmy, że dokonaliśmy tu następującej zmiany wartości granic całkowania:

x	0	1
$t = x^2+1$	1	2

Uwaga. *Można również najpierw znaleźć funkcję pierwotną funkcji* $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ *(czyli* $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$*) i zastosować Twierdzenie Newtona-Leibniza.*

Na podstawie twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie możemy sformułować następujące wnioski.

Wniosek 2 (O całce z funkcji parzystej w przedziale symetrycznym względem zera)

Jeżeli a *jest liczbą dodatnią, natomiast* $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ *jest parzystą funkcją ciągłą, to*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2 \int_{0}^{a} f(x)\, dx.$$

Na podstawie twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie możemy sformułować następujące wnioski.

Wniosek 2 (O całce z funkcji parzystej w przedziale symetrycznym względem zera)

Jeżeli a jest liczbą dodatnią, natomiast $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ jest parzystą funkcją ciągłą, to

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

DOWÓD.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Dokonując w pierwszej z całek występujących w powyższej sumie podstawienia $t = -x$ i stosownej zmiany granic całkowania

x	$-a$	0
$t = -x$	a	0

otrzymujemy

$$-\int_{a}^{0} f(-t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Ostatnia równość wynika z faktu, że f jest funkcją parzystą oraz zamiany symbolu zmiennej całkowania z t na x.

Rozumując analogicznie jak powyżej, możemy otrzymać kolejny wniosek.

Wniosek 3 (O całce z funkcji nieparzystej w przedziale symetrycznym względem zera)

Jeżeli a jest liczbą dodatnią, natomiast $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ jest nieparzystą funkcją ciągłą, to

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0.$$

Rozumując analogicznie jak powyżej, możemy otrzymać kolejny wniosek.

Wniosek 3 (O całce z funkcji nieparzystej w przedziale symetrycznym względem zera)

Jeżeli a jest liczbą dodatnią, natomiast $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ jest nieparzystą funkcją ciągłą, to

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0.$$

Powyższe wnioski mają dość duże znaczenie w praktycznych obliczeniach, gdyż niejednokrotnie prościej jest znaleźć wartość funkcji pierwotnej w zerze niż w $-a$. W szczególności powyższy wniosek pozwala natychmiast podać wartość liczbową niektórych całek bez konieczności przeprowadzania złożonych rachunków.

Rozumując analogicznie jak powyżej, możemy otrzymać kolejny wniosek.

Wniosek 3 (O całce z funkcji nieparzystej w przedziale symetrycznym względem zera)

Jeżeli a jest liczbą dodatnią, natomiast $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ jest nieparzystą funkcją ciągłą, to

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0.$$

Powyższe wnioski mają dość duże znaczenie w praktycznych obliczeniach, gdyż niejednokrotnie prościej jest znaleźć wartość funkcji pierwotnej w zerze niż w $-a$. W szczególności powyższy wniosek pozwala natychmiast podać wartość liczbową niektórych całek bez konieczności przeprowadzania złożonych rachunków.

Przykład 10

Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x\, dx.$$

Rozumując analogicznie jak powyżej, możemy otrzymać kolejny wniosek.

Wniosek 3 (O całce z funkcji nieparzystej w przedziale symetrycznym względem zera)

Jeżeli a jest liczbą dodatnią, natomiast $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ jest nieparzystą funkcją ciągłą, to

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0.$$

Powyższe wnioski mają dość duże znaczenie w praktycznych obliczeniach, gdyż niejednokrotnie prościej jest znaleźć wartość funkcji pierwotnej w zerze niż w $-a$. W szczególności powyższy wniosek pozwala natychmiast podać wartość liczbową niektórych całek bez konieczności przeprowadzania złożonych rachunków.

Przykład 10

Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x\, dx.$$

Ponieważ funkcja $f(x) = x^2 \sin x$ jest nieparzystą funkcją ciągłą, gdyż $f(-x) = (-x)^2 \sin(-x) = x^2 \cdot (-\sin x) = -f(x)$, a przedział $[-\pi, \pi]$ jest przedziałem symetrycznym względem zera, więc szukana całka jest równa 0.

Przykład 11

Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx.$$

Przykład 11

Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx.$$

Pokażemy, że funkcja ciągła $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ *jest funkcją nieparzystą. Rzeczywiście*

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{\frac{1}{e^x} - 1}{\frac{1}{e^x} + 1} = \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = -\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -f(x).$$

Ponieważ ponadto przedział $[-\ln 2, \ln 2]$ *jest przedziałem symetrycznym względem zera, to szukana całka jest równa 0.*

Twierdzenie 13

Jeżeli funkcja f *ma okres* T *oraz jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale* $[0, T]$, *to dla dowolnego* $a \in \mathbb{R}$ *mamy*

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx\,.$$

Przykład 12

Obliczyć całkę:

$$\int_1^{1+2\pi} \sin x\,dx.$$

Twierdzenie 13

Jeżeli funkcja f *ma okres* T *oraz jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale* $[0, T]$, *to dla dowolnego* $a \in \mathbb{R}$ *mamy*

$$\int_a^{a+T} f(x)\, dx = \int_0^T f(x)\, dx\ .$$

Przykład 12

Obliczyć całkę:

$$\int_1^{1+2\pi} \sin x\ dx.$$

$$\int_1^{1+2\pi} \sin x\ dx = \int_0^{2\pi} \sin x\ dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi}$$

Twierdzenie 13

Jeżeli funkcja f ma okres T oraz jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[0,T]$, to dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ mamy

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx\,.$$

Przykład 12

Obliczyć całkę:

$$\int_1^{1+2\pi} \sin x\,dx.$$

$$\int_1^{1+2\pi} \sin x\,dx = \int_0^{2\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos 0 = -1 + 1 = 0.$$

Pierwsze zasadnicze twierdzenie rachunku całki oznaczonej Riemanna

Twierdzenie 14 (O funkcji górnej granicy całkowania)

Niech f *będzie funkcją całkowalną w sensie Riemanna na przedziale* $[a, b]$, $c \in [a, b]$ *i niech*

$$F(x) := \int_c^x f(t)\, dt, \quad x \in [a, b].$$

Wówczas

1. *funkcja* F *jest ciągła,*

Pierwsze zasadnicze twierdzenie rachunku całki oznaczonej Riemanna

Twierdzenie 14 (O funkcji górnej granicy całkowania)

Niech f będzie funkcją całkowalną w sensie Riemanna na przedziale $[a, b]$, $c \in [a, b]$ i niech

$$F(x) := \int_c^x f(t)\,dt, \quad x \in [a, b].$$

Wówczas

1. *funkcja F jest ciągła,*
2. *jeżeli f jest funkcją ciągłą w punkcie $x_0 \in [a, b]$, to funkcja F jest funkcją różniczkowalną w punkcie x_0 oraz*

$$F'(x_0) = f(x_0),$$

przy czym jeżeli $x_0 = a$ lub $x_0 = b$, to pochodną funkcji F w punkcie x_0 rozumiemy jako pochodną jednostronną.

Przykład 13

Wyznaczyć funkcję górnej granicy całkowania $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \;\; x \in [-2,3]$, *jeśli funkcja*

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \textit{dla} \quad -2 \le x < 0 \\ x-1 & \textit{dla} \quad 0 \le x \le 3 \end{cases} .$$

Narysować wykresy funkcji f *i* F.

Przykład 13

Wyznaczyć funkcję górnej granicy całkowania $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, $x \in [-2,3]$, *jeśli funkcja*

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \textit{dla} \quad -2 \le x < 0 \\ x-1 & \textit{dla} \quad 0 \le x \le 3 \end{cases}.$$

Narysować wykresy funkcji f *i* F.

Wyznaczymy najpierw funkcję górnej granicy całkowania

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x (t+1)\,dt & \textit{dla} \quad -2 \le x < 0 \\ \\ \int_0^x (t-1)\,dt & \textit{dla} \quad 0 \le x \le 3 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x & \textit{dla} \quad -2 \le x < 0 \\ \\ \frac{x^2}{2} - x & \textit{dla} \quad 0 \le x \le 3 \end{cases}.$$

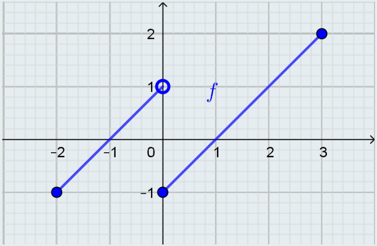
Przykład 13

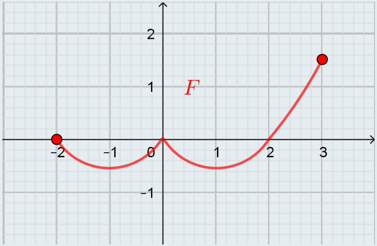
Wyznaczyć funkcję górnej granicy całkowania $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt,\ x \in [-2,3]$, *jeśli funkcja*

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \textit{dla} \quad -2 \le x < 0 \\ x-1 & \textit{dla} \quad 0 \le x \le 3 \end{cases}.$$

Narysować wykresy funkcji f *i* F.
Wyznaczymy najpierw funkcję górnej granicy całkowania

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x (t+1)\,dt & \textit{dla} \quad -2 \le x < 0 \\ \int_0^x (t-1)\,dt & \textit{dla} \quad 0 \le x \le 3 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x & \textit{dla} \quad -2 \le x < 0 \\ \frac{x^2}{2} - x & \textit{dla} \quad 0 \le x \le 3 \end{cases}.$$





Zastosowania rachunku całkowego

Twierdzenie 15

Jeżeli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *jest nieujemną funkcją ciągłą, to pole obszaru* D *ograniczonego wykresem funkcji* f*, osią* Ox *oraz prostymi* $x = a$ *i* $x = b$ *wyraża się wzorem*

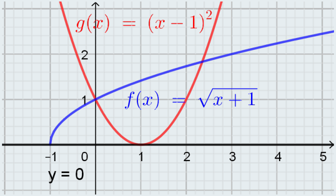
$$|D| = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Przykład 14

Obliczyć pole obszaru zawartego pomiędzy wykresami funkcji $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = (x-1)^2$, *gdzie* $x \in [-1, 1]$ *oraz osią* $0x$.

Przykład 14

Obliczyć pole obszaru zawartego pomiędzy wykresami funkcji $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = (x-1)^2$, *gdzie* $x \in [-1, 1]$ *oraz osią* $0x$.



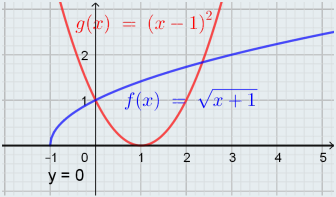
Zauważmy, że rozpatrywana figura jest sumą dwóch trapezów krzywoliniowych

$$T_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \sqrt{x+1},\ x \in [-1,0]\},$$
$$T_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le (x-1)^2,\ x \in [0,1]\},$$

więc jej pole jest równe sumie pól tych trapezów.

Przykład 14

Obliczyć pole obszaru zawartego pomiędzy wykresami funkcji $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = (x-1)^2$, *gdzie* $x \in [-1,1]$ *oraz osią* $0x$.



Zauważmy, że rozpatrywana figura jest sumą dwóch trapezów krzywoliniowych

$$T_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \sqrt{x+1},\ x \in [-1,0]\},$$
$$T_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le (x-1)^2,\ x \in [0,1]\},$$

więc jej pole jest równe sumie pól tych trapezów. Korzystając z interpretacji geometrycznej całki oznaczonej, otrzymujemy

$$|D_{T_1}| = \int_{-1}^{0} \sqrt{x+1}\, dx = \tfrac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{0} = \frac{2}{3},$$
$$|D_{T_2}| = \int_{0}^{1} (x-1)^2\, dx = \tfrac{1}{3}(x-1)^{3}\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{3}.$$

Szukane pole wynosi zatem $|D| = |D_{T_1}| + |D_{T_2}| = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1.$

Wniosek 4 (pole trapezu krzywoliniowego)

Niech $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *będą funkcjami ciągłymi takimi, że* $f(x) \le g(x)$ *dla* $x \in [a, b]$. *Wówczas pole obszaru* D *ograniczonego wykresami funkcji* f *i* g *oraz prostymi* $x = a$ *i* $x = b$ *jest równe*

$$|D| = \int_a^b \Big(g(x) - f(x)\Big)\, dx.$$

Przykład 15

Znaleźć pole figury zawartej między wykresami funkcji $f(x) = e^{-x}$ *i* $g(x) = e^x$ *oraz prostą* $x = 1$.

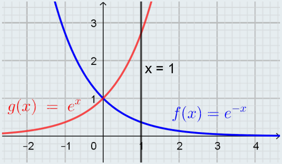
Wniosek 4 (pole trapezu krzywoliniowego)

Niech $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *będą funkcjami ciągłymi takimi, że* $f(x) \leq g(x)$ *dla* $x \in [a, b]$. *Wówczas pole obszaru* D *ograniczonego wykresami funkcji* f *i* g *oraz prostymi* $x = a$ *i* $x = b$ *jest równe*

$$|D| = \int_a^b \Big(g(x) - f(x)\Big)\, dx.$$

Przykład 15

Znaleźć pole figury zawartej między wykresami funkcji $f(x) = e^{-x}$ *i* $g(x) = e^x$ *oraz prostą* $x = 1$.



Dla każdego $x \in [0, 1\,]$ *zachodzi nierówność* $f(x) \leq g(x)$, *więc szukane pole obliczamy w następujący sposób:*

$$|D| = \int_0^1 \Big(e^x - e^{-x}\Big)\, dx = \Big(e^x + e^{-x}\Big)\Big|_0^1 = e + e^{-1} - 2.$$

Definicja 2

Mówimy, że Γ *jest krzywą zadaną parametrycznie, jeżeli istnieją funkcje ciągłe* $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ *oraz* $\psi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ *takie, że*

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = \varphi(t), y = \psi(t) \ \textit{dla } t \in [\alpha, \beta]\}.$$

Twierdzenie 16 (O polu obszaru ograniczonego łukiem krzywej zadanej parametrycznie)

Niech Γ *będzie krzywą zadaną parametrycznie, jak jest to opisane w definicji 2. Załóżmy dodatkowo, że funkcja* φ *jest rosnąca i ma w każdym punkcie przedziału* $[\alpha, \beta]$ *ciągłą pochodną, a funkcja* ψ *jest nieujemna. Pole* $|D|$ *obszaru ograniczonego łukiem krzywej* Γ*, odcinkiem osi OX oraz prostymi* $x = a$*,* $x = b$*, gdzie* $a = \varphi(\alpha)$*,* $b = \varphi(\beta)$*, wyraża się wzorem*

$$|D| = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt.$$

Przykład 10

Obliczymy pole obszaru ograniczonego osią Ox i jednym łukiem krzywej zwanej cykloidą , która zadana jest równaniami parametrycznymi

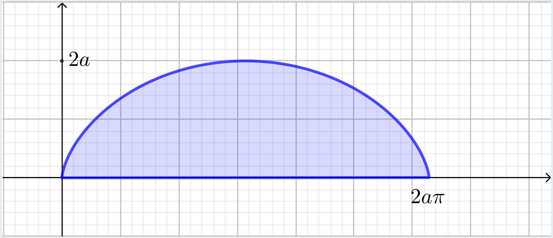
$$\begin{cases} x = \varphi(t) := a(t - \sin t), \\ y = \psi(t) := a(1 - \cos t), \end{cases}$$

gdzie a jest ustaloną liczbą dodatnią.

Obliczymy pole obszaru ograniczonego osią Ox i jednym łukiem krzywej zwanej cykloidą , która zadana jest równaniami parametrycznymi

$$\begin{cases} x = \varphi(t) := a(t - \sin t), \\ y = \psi(t) := a(1 - \cos t), \end{cases}$$

gdzie a jest ustaloną liczbą dodatnią.
Cykloida to krzywa opisująca tor ruchu punktu leżącego na obwodzie koła o promieniu a, które toczy się bez poślizgu po prostej. Zauważmy, że wartości $y = \psi(t)$ powtarzają się cyklicznie, gdy parametr t przebiega każdy z przedziałów $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$, gdzie k jest liczbą całkowitą. Dla naszych potrzeb wybierzmy jeden z takich przedziałów, np. $[0, 2\pi]$.



Cykloida

Zauważmy, że $\varphi'(t) = \psi(t) \geq 0$ dla każdego $t \in [0, 2\pi]$, więc spełnione są założenia powyższego twierdzenia. Zatem

$$
\begin{aligned}
|D| &= \int_0^{2\pi} \psi(t)\varphi'(t)dt = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)dt \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt \\
&= a^2 \left((t - 2\sin t)\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt \right) \\
&= a^2 \left(2\pi + \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right)\Big|_0^{2\pi} \right) = a^2(2\pi + \pi) = 3\pi a^2.
\end{aligned}
$$

Twierdzenie 17

Załóżmy, że funkcja $f : [\alpha, \beta] \to [0, \infty)$ *jest ciągła* $0 < \beta - \alpha < 2\pi$. *Jeżeli krzywa dana jest w biegunowym układzie współrzędnych równaniem* $r = f(\phi)$, *to pole obszaru* D *ograniczonego wykresem funkcji* f *oraz półprostymi* $\phi = \alpha$ *i* $\phi = \beta$ *wyraża się wzorem*

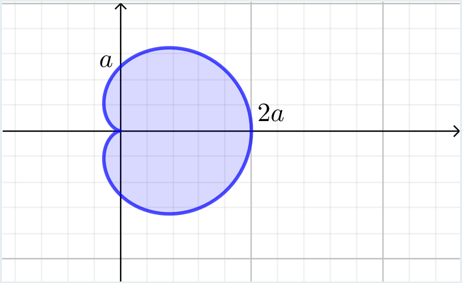
$$|D| = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\phi = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \Big(f(\phi) \Big)^2 d\phi.$$

Przykład 17

Wyznaczmy pole figury ograniczonej przez kardioidę, czyli krzywą zdefiniowaną biegunowo za pomocą przepisu

$$r = a(1 + \cos\phi), \qquad \textit{gdzie} \qquad \phi \in [-\pi, \pi],$$

przy czym a jest ustaloną liczbą dodatnią. Gdy wartości kąta ϕ rosną od 0 do $\frac{\pi}{2}$, to wartości cosinusa maleją od 1 do 0, a więc promień r maleje od $a(1+\cos 0) = 2a$ do $a(1+\cos\frac{\pi}{2}) = a$. Z kolei, gdy ϕ rośnie od $\frac{\pi}{2}$ do π, to wartości funkcji cosinus maleją od 0 do -1, a więc promień r maleje od a do $a(1+\cos\pi) = 0$. Ponadto promień r rośnie od 0 do $2a$ dla kąta ϕ zmieniającego się od $-\pi$ do 0. Ponieważ wykres funkcji cosinus jest symetryczny względem osi Oy, to kardioida jest symetryczna względem osi Ox.



Kardioida

Korzystając z powyższego twierdzenia i symetrii rozpatrywanego obszaru względem osi Ox, otrzymujemy

$$|D| = 2 \cdot \frac{1}{2} \int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2 d\phi = \int\limits_{0}^{\pi} a^2 (1 + \cos\phi)^2 d\phi = a^2 \int\limits_{0}^{\pi} (1 + 2\cos\phi + \cos^2\phi) d\phi$$

$$= a^2 \Big[\phi \Big|_0^{\pi} + 2\sin\phi \Big|_0^{\pi} + \int\limits_{0}^{\pi} \frac{1}{2}\big(1 + \cos 2\phi\big) d\phi \Big] = a^2 \Big[\pi + \frac{1}{2}\phi \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2\phi}{2} \Big|_0^{\pi} \Big]$$

$$= 2a^2 \left[\pi + \frac{\pi}{2} \right] = 3\pi a^2.$$

Twierdzenie 18 (długość krzywej zadanej parametrycznie)

Załóżmy, że funkcje $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ *mają ciągłe pochodne. Wówczas długość krzywej* $L = \{(\varphi(t), \psi(t)) : t \in [\alpha, \beta]\}$ *wyraża się wzorem*

$$|L| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\Big(\varphi'(t)\Big)^2 + \Big(\psi'(t)\Big)^2}\, dt.$$

Twierdzenie 18 (długość krzywej zadanej parametrycznie)

Załóżmy, że funkcje $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ *mają ciągłe pochodne. Wówczas długość krzywej* $L = \{(\varphi(t), \psi(t)) : t \in [\alpha, \beta]\}$ *wyraża się wzorem*

$$|L| = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\, dt.$$

Wniosek 5 (długość krzywej)

Załóżmy, że funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *ma ciągłą pochodną. Wówczas długość krzywej* $L = \{(x, f(x)) : x \in [a,b]\}$ *wyraża się wzorem*

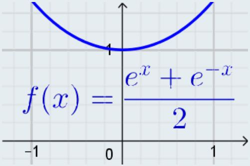
$$|L| = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx.$$

Przykład 18

Obliczyć długość linii łańcuchowej $\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$, *gdzie* $x \in [-1, 1]$.

Przykład 18

Obliczyć długość linii łańcuchowej $\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$, *gdzie* $x \in [-1, 1]$.



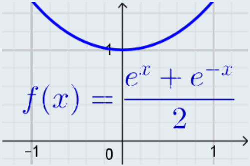
Mamy $f'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ *- funkcja ciągła oraz*

$$1 + \left(f'(x)\right)^2 = \frac{4 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}{4}.$$

Przykład 18

Obliczyć długość linii łańcuchowej $\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$, *gdzie* $x \in [-1, 1]$.



Mamy $f'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ *- funkcja ciągła oraz*

$$1 + \left(f'(x)\right)^2 = \frac{4 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}{4}.$$

Zatem

$$|L| = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}{4}}\, dx = 2\int_0^1 \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) dx$$

$$= e^x - e^{-x}\Big|_0^1 = e - e^{-1} - (1 - 1) = e - e^{-1}.$$

Wniosek 6

Załóżmy, że funkcja $f : [\alpha, \beta] \to [0, \infty)$ *ma ciągłą pochodną* $0 < \beta - \alpha < 2\pi$. *Jeżeli krzywa* L *dana jest w biegunowym układzie współrzędnych równaniem* $r = f(\phi)$, $\alpha \le \phi \le \beta$, *to jej długość wyraża się wzorem*

$$|L| = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2} d\phi = \int_\alpha^\beta \sqrt{\Big(f(\phi)\Big)^2 + \Big(f'(\phi)\Big)^2} d\phi.$$

Twierdzenie 19 (O objętości bryły powstałej z obrotu łuku krzywej zadanej parametrycznie wokół osi Ox)

Niech Γ będzie krzywą zadaną parametrycznie, jak jest to opisane w definicji 2. Załóżmy dodatkowo, że funkcje φ, ψ mają ciągłe pochodne oraz funkcja φ jest rosnąca lub malejąca, a funkcja ψ jest nieujemna. Objętości bryły powstałej z obrotu łuku krzywej Γ wokół osi Ox wyraża się wzorem

$$|V| = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t)\, |\varphi'(t)| dt.$$

Twierdzenie 20 (objętość bryły obrotowej)

Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *będzie nieujemną funkcją ciągłą,* D *obszarem ograniczonym wykresem funkcji* f*, osią* Ox *oraz prostymi* $x = a$ *i* $x = b$*. Wówczas objętość bryły obrotowej* V *powstałej w wyniku obrotu obszaru* D *dookoła osi* Ox *jest równe*

$$|V| = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Twierdzenie 20 (objętość bryły obrotowej)

Niech $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *będzie nieujemną funkcją ciągłą,* D *obszarem ograniczonym wykresem funkcji* f*, osią* Ox *oraz prostymi* $x=a$ *i* $x=b$*. Wówczas objętość bryły obrotowej* V *powstałej w wyniku obrotu obszaru* D *dookoła osi* Ox *jest równe*

$$|V|=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Twierdzenie 21 (objętość bryły obrotowej)

Niech $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *(*$a\geq 0$*) będzie nieujemną funkcją ciągłą,* D *obszarem ograniczonym wykresem funkcji* f*, osią* Ox *oraz prostymi* $x=a$ *i* $x=b$*. Wówczas objętość bryły obrotowej* V *powstałej w wyniku obrotu obszaru* D *dookoła osi* Oy *wyrażą się wzorem*

$$|V|=2\pi\int_a^b xf(x)\,dx.$$

Przykład 19

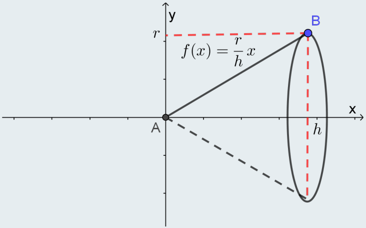
Korzystając z Twierdzenia o objętości bryły powstałej przez obrót wykresu funkcji jednej zmiennej wokół osi Ox obliczyć objętość stożka, którego wysokość jest równa h, a promień jego podstawy wynosi r.

Przykład 19

Korzystając z Twierdzenia o objętości bryły powstałej przez obrót wykresu funkcji jednej zmiennej wokół osi Ox obliczyć objętość stożka, którego wysokość jest równa h, a promień jego podstawy wynosi r.

Zauważmy, że stożek ten powstaje z obrotu odcinka o końcach w punktach $A = (0,0)$ i $B = (h, r)$ $(h > 0,\ r > 0)$ wokół osi Ox. Ogólnie prostą przechodzącą przez punkty (x_A, y_A) oraz (x_B, y_B) możemy opisać za pomocą równania

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A), \quad \textit{czyli u nas} \quad y = \frac{r}{h}x, \ \ \textit{gdzie } x \in [0, h].$$

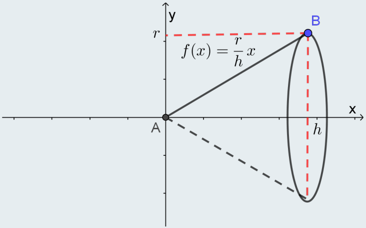


Przykład 19

Korzystając z Twierdzenia o objętości bryły powstałej przez obrót wykresu funkcji jednej zmiennej wokół osi Ox obliczyć objętość stożka, którego wysokość jest równa h, a promień jego podstawy wynosi r.

Zauważmy, że stożek ten powstaje z obrotu odcinka o końcach w punktach $A=(0,0)$ i $B=(h,r)$ $(h>0,\ r>0)$ wokół osi Ox. Ogólnie prostą przechodzącą przez punkty (x_A,y_A) oraz (x_B,y_B) możemy opisać za pomocą równania

$$y-y_A=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_A),\quad \text{czyli u nas}\quad y=\frac{r}{h}x,\ \text{gdzie } x\in[0,h].$$



Szukaną objętość możemy zatem obliczyć w następujący sposób:

$$|V|=\pi\int_0^h\left(\frac{r}{h}x\right)^2dx=\frac{r^2}{h^2}\pi\int_0^h x^2\,dx=\frac{r^2}{h^2}\pi\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^h=\frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Twierdzenie 22 (O polu powierzchni bryły powstałej z obrotu łuku krzywej zadanej parametrycznie wokół osi Ox)

Niech Γ będzie krzywą zadaną parametrycznie, jak jest to opisane w definicji 2. Załóżmy dodatkowo, że funkcje φ, ψ mają ciągłe pochodne oraz funkcja φ jest rosnąca lub malejąca, a funkcja ψ jest nieujemna. Pole powierzchni bryły powstałej z obrotu łuku krzywej Γ wokół osi Ox wyraża się wzorem

$$|P| = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

Twierdzenie 23 (pole powierzchni obrotowej)

Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją nieujemną z ciągłą pochodną,* P *powierzchnią powstałą w wyniku obrotu krzywej* $L = \{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$ *dookoła osi* Ox*. Wówczas pole powierzchni* P *wyraża się wzorem*

$$|P| = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx.$$

Twierdzenie 23 (pole powierzchni obrotowej)

Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją nieujemną z ciągłą pochodną,* P *powierzchnią powstałą w wyniku obrotu krzywej* $L = \{(x, f(x)) :\ x \in [a,b]\}$ *dookoła osi* Ox*. Wówczas pole powierzchni* P *wyraża się wzorem*

$$|P| = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx.$$

Przykład 20

Obliczyć pole powierzchni obrotowej P *powstałej przez obrót łuku sinusoidy* $f(x) = \sin x$*, gdzie* $x \in [0, \pi]$ *wokół osi* $0x$*.*

Twierdzenie 23 (pole powierzchni obrotowej)

Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją nieujemną z ciągłą pochodną,* P *powierzchnią powstałą w wyniku obrotu krzywej* $L = \{(x, f(x)) : x \in [a,b]\}$ *dookoła osi* Ox*. Wówczas pole powierzchni* P *wyraża się wzorem*

$$|P| = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx.$$

Przykład 20

Obliczyć pole powierzchni obrotowej P *powstałej przez obrót łuku sinusoidy* $f(x) = \sin x$*, gdzie* $x \in [0,\pi]$ *wokół osi* $0x$*.*
Ponieważ funkcja $\sin x$ *na przedziale* $[0,\pi]$ *jest nieujemna i ma ciągłą pochodną, to pole powierzchni* P *wyraża się wzorem*

$|P| = 2\pi \int_0^\pi \sin x\sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx$

Twierdzenie 23 (pole powierzchni obrotowej)

Niech $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *będzie funkcją nieujemną z ciągłą pochodną,* P *powierzchnią powstałą w wyniku obrotu krzywej* $L=\{(x,f(x)):\ x\in[a,b]\}$ *dookoła osi* Ox*. Wówczas pole powierzchni* P *wyraża się wzorem*

$$|P| = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Przykład 20

Obliczyć pole powierzchni obrotowej P *powstałej przez obrót łuku sinusoidy* $f(x)=\sin x$*, gdzie* $x\in[0,\pi]$ *wokół osi* $0x$*.*
Ponieważ funkcja $\sin x$ *na przedziale* $[0,\pi]$ *jest nieujemna i ma ciągłą pochodną, to pole powierzchni* P *wyraża się wzorem*

$$|P| = 2\pi\int_0^\pi \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx = \left|\begin{array}{l} t=\cos x \\ dt=-\sin x\,dx \\ x=0\Rightarrow t=1 \\ x=\pi\Rightarrow t=-1 \end{array}\right| = -2\pi\int_1^{-1}\sqrt{1+t^2}\,dt$$

Twierdzenie 23 (pole powierzchni obrotowej)

Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją nieujemną z ciągłą pochodną,* P *powierzchnią powstałą w wyniku obrotu krzywej* $L = \{(x, f(x)) :\ x \in [a,b]\}$ *dookoła osi* Ox*. Wówczas pole powierzchni* P *wyraża się wzorem*

$$|P| = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx.$$

Przykład 20

Obliczyć pole powierzchni obrotowej P *powstałej przez obrót łuku sinusoidy* $f(x) = \sin x$*, gdzie* $x \in [0, \pi]$ *wokół osi* $0x$*.*
Ponieważ funkcja $\sin x$ *na przedziale* $[0,\pi]$ *jest nieujemna i ma ciągłą pochodną, to pole powierzchni* P *wyraża się wzorem*

$$|P| = 2\pi \int_0^\pi \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\, dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x\, dx \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = \pi \Rightarrow t = -1 \end{array} \right| = -2\pi \int_1^{-1} \sqrt{1+t^2}\, dt$$

$$= 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1+t^2}\, dt = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\, dt = \cdots = 4\pi\left(\frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln\left|t + \sqrt{1+t^2}\right|\right)\Big|_0^1$$

Twierdzenie 23 (pole powierzchni obrotowej)

Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją nieujemną z ciągłą pochodną,* P *powierzchnią powstałą w wyniku obrotu krzywej* $L = \{(x, f(x)) : x \in [a,b]\}$ *dookoła osi* Ox*. Wówczas pole powierzchni* P *wyraża się wzorem*

$$|P| = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\, dx.$$

Przykład 20

Obliczyć pole powierzchni obrotowej P *powstałej przez obrót łuku sinusoidy* $f(x) = \sin x$*, gdzie* $x \in [0,\pi]$ *wokół osi* $0x$*.*

Ponieważ funkcja $\sin x$ *na przedziale* $[0,\pi]$ *jest nieujemna i ma ciągłą pochodną, to pole powierzchni* P *wyraża się wzorem*

$$|P| = 2\pi \int_0^\pi \sin x \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x\, dx \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = \pi \Rightarrow t = -1 \end{array} \right| = -2\pi \int_1^{-1} \sqrt{1+t^2}\, dt$$

$$= 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1+t^2}\, dt = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\, dt = \cdots = 4\pi \Big(\frac{1}{2} t\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln|t + \sqrt{1+t^2}|\Big)\Big|_0^1$$

$$= 2\pi\Big(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}) - (0+0)\Big) = 2\pi\sqrt{2} + 2\pi\ln(1+\sqrt{2}).$$

Twierdzenie 24 (pole powierzchni obrotowej)

Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *(*$a \geq 0$*) będzie funkcją nieujemną z ciągłą pochodną. Wówczas pole powierzchni* P *powstałej w wyniku obrotu krzywej* $L = \{(x, f(x)) :\ x \in [a,b]\}$ *dookoła osi* Oy *wyraża się wzorem*

$$|P| = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx.$$

Zastosowania całki oznaczonej w fizyce

Twierdzenie 25 (droga przebyta w ruchu zmiennym)

Punkt materialny porusza się ze zmienną szybkością $v : [0, T] \to \mathbb{R}$ *(ciągła),* $T_1, T_2 \in [0, T]$*. Droga przebyta przez ten punkt w czasie od* T_1 *do* T_2 *jest równa*

$$s = \int_{T_1}^{T_2} v(t)\, dt.$$

Zastosowania całki oznaczonej w fizyce

Twierdzenie 25 (droga przebyta w ruchu zmiennym)

Punkt materialny porusza się ze zmienną szybkością $v : [0, T] \to \mathbb{R}$ *(ciągła),* $T_1, T_2 \in [0, T]$*. Droga przebyta przez ten punkt w czasie od* T_1 *do* T_2 *jest równa*

$$s = \int_{T_1}^{T_2} v(t)\, dt.$$

Twierdzenie 26 (praca wykonana przez zmienną siłę)

Załóżmy, że równolegle do osi Ox *działa zmienna siła* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *(ciągła). Praca wykonana przez te siłę od punktu* a *do punktu* b *jest równa*

$$W = \int_{a}^{b} F(x)\, dx.$$